

GUJARAT TECHNOLOGICAL UNIVERSITY

Diploma Sem-II Remedial Examination September 2009

Subject code: 320001**Subject Name: Mathematics II**

Date: 18/09/2009

Time: 11:00am-1:30pm

Total Marks: 70

Instructions:

1. Attempt all questions.
2. Make suitable assumptions wherever necessary.
3. Figures to the right indicate full marks.
4. Use of programmable calculator is prohibited.
5. English version Authentic

- Q:1 (a)**
1. Show that the points $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ & $(c, a+b)$ are collinear. **02**
 2. A variable point P moves in such a way that $PA^2+PB^2=100$, where $A(3,4)$ and $B(-3,-4)$ are given points. Find the equation of locus of point P. **02**
 3. In which ratio y-axis divides line segment joining points $(3,5)$ and $(6,7)$? Is division internal or external? Find co-ordinates of division point. **03**

- (b)** If two straight lines $3x+4my+8=0$ and $3my-9x+10=0$ are perpendicular to each other then find m. **03**
- (c)** Find equation of line passing through the point $(3,4)$ and (i) Parallel **04**
(ii) Perpendicular to the line $3y-2x=1$.

- Q:2 (a)**
1. Find center and radius of the circle $4x^2+4y^2+8x-12y-3=0$. **03**
 2. Find equation of tangent and normal to the circle $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ at the point $(-2,2)$. **04**

- (b)**
- (1) If $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ then prove that $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. **02**
 - (2) Find $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{5x}{7}\right)^{\frac{2}{x}}$ **02**
 - (3) Find $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{x^2+5x+6}$ **03**

OR

- (b)**
- (1) If $f(x) = \tan x$ then prove that $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$ **02**
 - (2) Find $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+27}{x^2+5x+6}$ **02**
 - (3) Find $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin n\theta}$ **03**

- Q:3 (a)** Differentiate $\sqrt[n]{x}$ using definition. **04**
- (b)**
- (1) If $y = x^3 \sin(\log x)$ then find $\frac{dy}{dx}$. **03**
 - (2) If $y = a(\theta + \sin\theta)$, $x = a(1 + \cos\theta)$, then find $\frac{dy}{dx}$. **03**

(c) If $y = A \cos pt + B \sin pt$ then prove that $\frac{d^2y}{dt^2} + p^2y = 0.$ 04

OR

Q:3 (a) If $y = \frac{a+b \sin nx}{a \sin nx + b}$ then find $\frac{dy}{dx}$ 04

(b) (1) If $x + y = \sin(xy)$ then find $\frac{dy}{dx}$ 03

(2) If $y = \log(\sin x) + e^{\tan x}$ then find $\frac{dy}{dx}$ 03

(c) If $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$ then prove that $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0.$ 04

Q:4 (a) The equation of motion of a particle is $S = t^3 + 3t$, $t > 0$. (i) Find the velocity and acceleration at $t = 3$. (ii) When do velocity and acceleration become equal? 04

(b) Find the maxima and minima of the function $f(x) = x^3 - 3x + 11.$ 03

(c) (1) Evaluate $\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ 03

(2) Evaluate $\int \frac{(1-3x)^2}{x^3} dx$ 03

(3) Fill in the blank: $\int \frac{1}{a^x - x^a} dx = \text{_____}.$ 01

OR

Q:4 (a) If the equation of motion of a particle is $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 6$. Find its velocity When $t = 0$. Also find its acceleration when $v = 0.$ 04

(b) Find the maximum and minimum value of the function $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ 03

(c) (1) Evaluate $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ 03

(2) Evaluate $\int \frac{4+3\cos x}{\sin^2 x} dx$ 03

(3) Fill in the blank: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \text{_____}.$ 01

Q:5 (a) Evaluate $\int x \log x dx$ 03

(b) Evaluate the following: 08

(1) $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$ (2) $\int_0^{\pi} \log_e \tan x dx$

(c) Find the area of the region bounded by the curve $y = x^2$ and line $y = x+2.$ 03

OR

Q:5 (a) Evaluate $\int x e^x dx$ 03

(b) Evaluate the following: 08

(1) $\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$

(c) Find the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2.$ 03

- પ્રશ્ન:1(અ) (1) સાબિત કરો કે બિંદુઓ $(a, b+c), (b, c+a)$ અને $(c, a+b)$ સમરેખ છે. 02
 (2) બિંદુ P એવી રીતે ગતિ કરે છે કે જેથી $PA^2+PB^2=100$, જ્યાં A(3,4) અને B(-3,-4) થાય તો P બિંદુના બિંદુપથનું સમીકરણ શોધો. 02
 (3) (3,5) અને (6,7) બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું y-અક્ષ ક્યાગુણોત્તરમાં 03
 વિભાજન કરે છે? વિભાજન આંતર છે કે બાબ્ય? વિભાજન બિંદુના
 યામો મેળવો.
- (બ) જો બે સુરેખાઓ $3x+4my+8=0$ અને $3my-9x+10=0$ એકબીજાને લંબ
 હોય તો m ની કિંમત શોધો. 03
- (ક) બિંદુ (3,4) માંથી પસાર થતી અને સુરેખા $3y-2x=1$ ને (i)સમાંતર
 (ii)લંબ હોય તેવી સુરેખાનું સમીકરણ શોધો. 04
- પ્રશ્ન:2(અ) (1)વર્તુળ $4x^2+4y^2+8x-12y-3=0$ નું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો. 03
 (2)વર્તુળ $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ પરના (-2,2) બિંદુ આગળના સ્પર્શક અને
 અભિલંબનાં સમીકરણો શોધો. 04
- (બ) (1) જો $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ હોય તો સાબિત કરો કે $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$. 02
 (2) કિંમત શોધો: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{5x}{7}\right)^{\frac{2}{x}}$ 02
 (3) કિંમત શોધો: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{x^2+5x+6}$
 અથવા 03
- (બ) (1) જો $f(x) = \tan x$ હોય તો સાબિત કરો કે $f(x + y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 02
 (2) કિંમત શોધો: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+27}{x^2+5x+6}$ 02
 (3) કિંમત શોધો: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin m\theta}{\sin n\theta}$ 03
- પ્રશ્ન:3(અ) વ્યાખ્યાને આધારે \sqrt{x} નું વિકલન કરો. 04
- (બ) (1) જો $y = x^3 \sin(\log x)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો. 03
 (2) જો $y = a(\theta + \sin\theta)$, $x = a(1 + \cos\theta)$, હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો. 03
- (ક) જો $y = Acospt + Bsinpt$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dt^2} + p^2y = 0$. 04
 અથવા
- પ્રશ્ન:3(અ) જો $y = \frac{a+bsinx}{asinx+b}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો. 04
 (બ) (1) જો $x + y = \sin(xy)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો. 03
 (2) જો $y = \log(\sin x) + e^{\tan x}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો. 03
 (ક) જો $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$. 04

- પ્રશ્ન:4(અ) એક કણની ગતિનું સમીકરણ $S = t^3 + 3t$, $t > 0$ છે, તો (i) જ્યારે $t = 3$ હોય 04
ત્યારે વેગ અને પ્રવેગ શોધો. (ii) જ્યારે વેગ અને પ્રવેગ સરખાં થશે?
(બ) વિધેય $f(x) = x^3 - 3x + 11$ ની અધિકતમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો. 03
(ક) (1) કિંમત શોધો: $\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ 03
(2) કિંમત શોધો: $\int \frac{(1-3x)^2}{x^3} dx$ 03
(3) ખાલી જગ્યા પૂરો : $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$. 01
અથવા

- પ્રશ્ન:4(અ) એક કણની ગતિનું સમીકરણ $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 6$ છે, તો જ્યારે $t = 0$ 04
હોય ત્યારે તેનો વેગ શોધો અને જ્યારે $v = 0$ હોય ત્યારે તેનો પ્રવેગ
શોધો.
(બ) વિધેય $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ ની અધિકતમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો. 03
(ક) (1) કિંમત શોધો: $\int \frac{1}{e^{x+e^{-x}}} dx$ 03
(2) કિંમત શોધો: $\int \frac{4+3\cos x}{\sin^2 x} dx$ 03
(3) ખાલી જગ્યા પૂરો : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$. 01

- પ્રશ્ન:5(અ) કિંમત શોધો: $\int x \log x dx$ 03
(બ) નીચેનાની કિંમત શોધો:
(1) $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log_e \tan x dx$
(ક) વક્ત $y = x^2$ અને સુરેખા $y = x+2$ થી ઘેરાયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો. 03
અથવા

- પ્રશ્ન:5(અ) કિંમત શોધો: $\int x e^x dx$ 03
(બ) નીચેનાની કિંમત શોધો:
(1) $\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$
(ક) વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ નું ક્ષેત્રફળ મેળવો. 03
