Seat No.: _____ Enrolment No.______

GUJARAT TECHNOLOGICAL UNIVERSITY

Diploma Engineering Sem. – I[st] - Examination – June/July- 2011

Subject code:310034

Subject Name: Mathematics I

Date:09/07/2011 **Time: 02:30 pm – 05:00 pm**

Total Marks: 70

Instructions:

1. **Attempt all questions.**
2. **Make suitable assumptions wherever necessary.**
3. **Figures to the right indicate full marks.**
4. **English version is Authentic**

Q.1 (a) Fill in the blanks. **07**

(i) If $3^{3x-1} = 3^{x+1}$ then x = __________

(ii) $\sqrt{15-2\sqrt{56}}$ =

(iii) $\log_b a \times \log_a b$ = _________

(iv) The Geometric Mean of 2 and 18 = _______

(v) ${}^{10}C_{10}$ = _________

(vi) If A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ then $|A|$ = _______

(vii) $|2i - 4j + 4k|$ = ___________

(b)

(i) Prove that **04**

$$\left(\sqrt{5}+1\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right]=4$$

(ii) If $\log\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ prove that a = b **03**

Q.2 (a) Fill in the blanks **07**

(i) 270^0 = ________radian

(ii) If r = 1 , $\theta = \frac{\pi^c}{6}$, the area of sector is = __________

(iii) $\sin^2 35^0 + \sin^2 55^0$ = _________

(iv) $\cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{3\pi}{2} \cdot \sin\frac{5\pi}{2}$ = ___________

(v) $\sin 28^0 \cos 17^0 + \cos 28^0 \sin 17^0$ = _____

(vi) sin 3A = ______

(vii) The period of $\sin\frac{x}{2}$ is = _______

(b)

(1) Find Three numbers in A.P. such that their Sum is 12 and Proucdt is 28. **04**

(2) Find the constant term in the expansion of $\left(x - \frac{5}{x^3}\right)^8$ **03**

OR

(b)

(1) For a series 2,4,8,16,---------------,find T_{15} and S_{15}. **04**

(2) Find approximate value of $\sqrt[3]{126}$, by using binomial theorem. **03**

Q.3

(a)

(1) If $A=\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ then prove that adj A = A. **04**

(2) If $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, find the Matrix $A^2 - 5A$ **03**

(b)

(1) For what value of m , the vectors 2i – 3j + 5k and mi – 6j – 8k are perpendicular to each other . **04**

03

(2) If $\bar{a}$ = j + k – i , $\bar{b}$ = 2i + j – 3k then find the direction cosine of the vector $2\bar{a}+3\bar{b}$.

OR

Q.3 (a)

(1) If $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ find A^{-1} **04**

(2) Solve 2x + 5y = 7 and 8x – 3y = 5,using matrix method **03**

(b)

(1) Show that the angle between the vectors , $\bar{a}$ = i + 2j – 3k and $\bar{b}$ = 2i + j – k is $\sin^{-1}\sqrt{\frac{35}{84}}$. **04**

(2) If $\bar{a}$ = 3i – 2j + k , $\bar{b}$ = 2i – 4j – 3k and $\bar{c}$ = – i + 2j + 2k ,find the value of $|2a - 3b - 5c|$. **03**

Q.4 (a)

(1) Find the value of **04**

$$\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}$$

(2) Prove that $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ **03**

(b) (1) Prove that, $\tan 10^0 \tan 35^0 + \tan 10^0 + \tan 35^0 = 1$ **04**

(2) prove that , $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta$ **03**

OR

Q. 4 (a) (1)Prove that $\tan\dfrac{5\pi}{4}\cot\dfrac{9\pi}{4}\tan\dfrac{17\pi}{4}\cot\dfrac{15\pi}{4} = -1$ **04**

(2)Prove that $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ **03**

(b) (1) Prove that $\tan 50^0 = \tan 40^0 + 2\tan 10$ **04**

(2) Prove that $4\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta = \sin 4\theta$ **03**

Q.5

(a) (1) Draw the graph of y = cosx , where $0 \le x \le \pi$. **04**

(2) Prove that , $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ **03**

(b) (1) A man observes the angle of elevation of the top of a tower from a point on the level ground as 30^0. Then he walks 30 meters toward the tower and observes the angle as 45^0.Find the height of the tower. **04**

(2) In a ΔABC , a $=\sqrt{2}$, b=1 and c $=\sqrt{5}$, find the largest and smallest angle .. **03**

OR

Q.5 (a) (1) Draw the graph of $y = \sin x$, where $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ **04**

(2) Find the value of $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{2} + \cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right)$ **03**

(b) (1) The angles of elevation of two trees of heights 20 meters and 15 meters,on the opposite banks of a lake , are observed by a person standing in the lake and on the line joining the two trees as 45^0 and 30^0 respectively .Find the breadh of the lake . **04**

(2) In a ΔABC , A= 30^0 , b=$\sqrt{3}$ and c = 2, find the solution of ΔABC **03**

****

પ્રશ્ન–૧ (અ) ખાલી જગ્યા પૂરો. **07**

(i) જો $3^{3x-1} = 3^{x+1}$ હોય તો x = _________

(ii) $\sqrt{15-2\sqrt{56}}$ =

(iii) $\log_b a \times \log_a b$ = _________

(iv) સં.ગુ.શ્રેણી મા 2 અને 18 નો સમગુણોતર મધ્યક = ______

(v) $^{10}C_{10}$ = _________

(vi) જો A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ તો $|A|$ = ______

(vii) $|2i-4j+4k|$ = __________

(બ) (i) સાબિત કરો કે **04**

$$(\sqrt{5}+1)\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right]=4$$

(ii) જો $\log\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ હોય તો સાબિત કરો કે a = b. **03**

પ્રશ્ન–૨ (અ) ખાલી જગ્યા પૂરો. **07**

(i) 270^0 = _______ રેડિયન

(ii) જો r = 1 , $\theta = \frac{\pi^c}{6}$ તો વ્રતાંશ્ નું ક્ષેત્રફળ્ = _________

(iii) $\sin^2 35^0 + \sin^2 55^0$ = _________

(iv) $\cos\frac{\pi}{2} . \sin\frac{3\pi}{2} . \sin\frac{5\pi}{2}$ = __________

(v) $\sin 28^0 \cos 17^0 + \cos 28^0 \sin 17^0$ = _____

(vi) sin 3A = ______

(vii) $\sin\frac{x}{2}$ નુ આવર્તમાન = _______છે.

(બ) (1) સંમાતર શ્રેણી માં હોય તેવી ત્રણ સંખ્યાઓ શોધો કે જેનો સરવાળો 12 અને ગુણાકાર 28 થાય. **04**

(2) $\left(x-\frac{5}{x^3}\right)^8$ ના વિસ્તરણ માં અચલ પદ શોધો **03**

અથવા

(બ) (1) શ્રેણી 2,4,8,16-------------માટે T_{15} અને S_{15} શોધો. **04**

(2) દ્વિપદી પ્રમેય નુ ઉપયોગ કરી $\sqrt[3]{126}$ નુ આસન્ન મૂલ્ય શોધો. **03**

પ્રશ્ન–૩

(અ)

(1) જો A= $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે adj A = A. **04**

(2) જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, હોય તો શ્રેણિક $A^2 - 5A$ મેળવો — 03

(બ) (1) m ની કઇ કીમત માટે સદિશો $2i - 3j + 5k$ — 04

$mi - 6j - 8k$ અને પરસ્પર લંબ સદિશો થાય.

(2) જો $\bar{a} = j + k - i$ અને $\bar{b} = 2i + j - 3k$ હોય તો $2\bar{a} + 3\bar{b}$ ના — 03

દિકકોસાઇન શોધો.

અથવા

પ્રશ્ન–૩

(અ) — 04

(1) જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો A^{-1} શોધો.

(2) શ્રેણિક ની રીતે સમીકરણ $2x + 5y = 7$ અને $8x - 3y = 5$ — 03

ઉકેલો

(બ) — 04

(1) સાબિત કરો કે સદિશો, $\bar{a} = i + 2j - 3k$ અને $\bar{b} = 2i + j - k$

વચ્ચેનો ખૂણો $\sin^{-1}\sqrt{\frac{35}{84}}$.છે.

(2) જો $\bar{a} = 3i - 2j + k$, $\bar{b} = 2i - 4j - 3k$ અને $\bar{c} = -i + 2j + 2k$, — 03

તો $|2a - 3b - 5c|$ ની કિંમત મેળવો.

પ્રશ્ન–૪

(અ) (1) કિંમત શોધો. — 04

$$\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}$$

(2) સાબિત કરો કે $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ — 03

(બ) (1) સાબિત કરો કે $\tan 10^0 \tan 35^0 + \tan 10^0 + \tan 35^0 = 1$ — 04

(2) સાબિત કરો કે $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta$ — 03

અથવા

પ્રશ્ન–૪

(અ) (1) સાબિત કરો કે $\tan\frac{5\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4}\tan\frac{17\pi}{4}\cot\frac{15\pi}{4} = -1$ — 04

(2)સાબિત કરો કે $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \text{cosec}\,\theta - \cot\theta$ — 03

(બ) (1) સાબિત કરો કે $\tan 50^0 = \tan 40^0 + 2\tan 10^0$ **04**

(2) સાબિત કરો કે $4\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta = \sin 4\theta$ **03**

પ્રશ્ન–૫

(અ) (1) $y = \cos x$, નો આલેખ દોરો જ્યાં $0 \le x \le \pi$. **04**

(2) સાબિત કરો કે $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ **03**

(બ) (1)એક માણસને સમતળ જમીન પર ના કોઇ બિદુંથી ટાવરની ટોચ નો ઉત્સેધકોણ 30^0 માલૂમ પડે છે .ટાવર ના મૂળ તરફ 30 મીટર ચાલી તેનો ઉત્સેધકોણ 45^0 માલૂમ પડે છે .તો ટાવર ની ઉંચાઇ શોધો. **04**

(2) જો ΔABC માં , $a=\sqrt{2}$, $b=1$ અને $c=\sqrt{5}$, હોય તો સૌથી મોટો અને સૌથી નાનો ખૂણો શોધો. **03**

અથવા

પ્રશ્ન–૫

(અ) (1) $y = \sin x$, નો આલેખ દોરો જ્યાં $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ **04**

(2) કીમત શોધો $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **03**

(બ) (1) સરોવર મા ઉભેલી એક વ્યક્તિ ને તેની સાથે સુરેખા માં સામસામે ના કાંઠા ઉપર આવેલા 20 મી અને 15 મી ની ઉચાઇ વાળા બે ઝાડના ઉત્સેધકોણ અનુક્રમે 45^0 અને 30^0 માલૂમ પડે છે તો .સરોવર ની પહોળાઇ શોધો . **04**

(2) જો ΔABC મા, $A= 30^0$, $b=\sqrt{3}$ અને $c=2$, તો ΔABCનો ઉકેલ શોધો **03**

****